ÉCOLE NAVALE

Deuxième composition de mathématiques Durée : 4 heures

I

1. – Montrer que la fonction φ , qui à x réel associe $\varphi(x) = \int_0^x \frac{\sin(2\pi t)}{t}\,dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire bornée et admet une limite en $+\infty$.
Pour n dans $\mathbb{N}^*$ on définit D_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme l'unique fonction continue telle que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})\ D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin \pi x}$. Justifier cette définition et montrer que D_n est paire et 1-périodique.

2. – Pour x dans $[0, \frac{1}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer (1) :

$$\frac{1}{\pi}\varphi(nx) - \int_0^x D_n(t)\,dt = -\frac{\sin(2\pi n x)}{2n\pi} + \int_0^x \left(\frac{1}{\pi t} - \operatorname{cotan}(\pi t)\right)\sin(2\pi n t)\,dt$$

A l'aide d'une intégration par parties, en déduire :

(2) $$\left|\frac{1}{\pi}\varphi(nx) - \int_0^x D_n(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2n\pi} + \frac{2}{n\pi^2}.$$

3. – Pour x dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer (3) $\int_0^x D_n(t)\,dt = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k\pi x)}{k\pi}$ et (4) $\int_0^1 D_n(t)\,dt = 1$. En déduire (5) $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ en utilisant (2), (4) et la parité de D_n.

4. – On pose pour x dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k\pi x)}{k\pi}$. Déduire de ce qui précède qu'il existe un réel A tel que $(\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}),\ |S_n(x)| \leqslant A$, et que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge sur $]0, 1[$ vers la fonction S définie sur $]0,1[$ par $S(x) = -x + \frac{1}{2}$, la convergence étant uniforme sur tout segment $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ avec $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

5. – Soit f une application 1-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On pose pour x dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(x) = -\int_0^1 S_n(t) f'(t+x)\,dt$.

a. Montrer :

$$P_n(x) = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(2k\pi x)\int_0^1 \cos(2k\pi t) f(t)\,dt + \sin(2k\pi x)\int_0^1 \sin(2k\pi t) f(t)\,dt\right).$$

b. Montrer pour $x = 0$ puis pour x réel $f(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f'(t+x)\,dt$.

c. Déduire de ce qui précède que la suite de fonctions $\left(P_n + \int_0^1 f(t)\,dt\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers f, uniformément sur $\mathbb{R}$.

II E désigne l'espace vectoriel des suites réelles. Pour $u \in E$ on note Δu la suite de terme général $u_n - u_{n+1}$ et l'on définit ainsi un endomorphisme de E.

1. – Si $P \in \mathbb{R}[X]$ on note $\Phi(P)$ l'élément de E de terme général $P(n)$. Pour $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_d[X]$ est le sous espace de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à d. Déterminer $\mathrm{Ker}\Delta$ et $\mathrm{Im}\Delta$, puis pour p entier non nul, montrer que $\mathrm{Ker}(\Delta^p) = \Phi(\mathbb{R}_{p-1}[X])$ et déterminer $\dim \mathrm{Ker}(\Delta^p)$. Quelle est l'image de l'endomorphisme Δ^p ?

2. – Soient u dans E, (n, p) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Montrer $\Delta^p u_n = \sum_{q=0}^{p} (-1)^q C_p^q u_{n+q}$.

III *La résolution de cette partie ne fait pas appel à la théorie des séries de Fourier.*

1. – Un élément u de E est dit convexe si : $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\Delta^2 u_n \geqslant 0)$.

Un élément de E est logarithmiquement convexe si :

$(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} \leqslant \sqrt{u_n \cdot u_{n+2}}$

a. Soit u dans E, à termes strictement positifs. Montrer u logarithmiquement convexe équivaut à $\mathscr{L}(u)$ convexe.

b. Pour u dans E, on note f_u l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout entier n, $f_u(n) = u_n$ et la restriction de f à $[n, n+1]$ est affine. Montrer l'équivalence entre u est convexe et f_u est convexe.

2. – Soit u dans E, convexe et vérifiant $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Montrer $\lim_{n\to+\infty} n\Delta u_n = 0$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} n\Delta^2 u_n$ converge.

3. – On note ici F l'espace vectoriel complexe des applications C^∞ et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, que l'on munit du produit scalaire hermitien

$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,\bar{g}(x)\,dx$ et on note $\|\ \|_2$ la norme associée.

Pour n dans $\mathbb{Z}$, soit e_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(x) = \exp(2i\pi nx)$ de F et $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$. On note G le sous espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de F.

a. Exprimer $c_n(f^{(k)})$ en fonction de n, k, et $c_n(f)$.

b. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de G.

c. On introduit sur F la norme $\|\ \|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Montrer que G est dense dans $(F, \|\ \|_\infty)$. Plus précisément on pose $Q_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e_k(x)$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \|f - Q_n(f)\|_\infty = 0$.

d. Soient $n_1, .., n_p$ des éléments distincts de $\mathbb{Z}$ et H l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_{n_1}, ..., e_{n_p})$. Pour f dans F, montrer que la projection orthogonale de f sur H est le vecteur

$$\sum_{k=1}^{p} c_{n_k}(f)\,e_{n_k}.$$

En déduire que les séries $\sum |c_n(f)|^2$ et $\sum |c_{-n}(f)|^2$ convergent et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |c_{-n}(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$$

4. – Déduire de ce qui précède l'égalité $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$ pour f dans F.

5. – Soit f dans F, montrer que la suite $k \to \|f^{(k)}\|_2$ est croissante et logarithmiquement convexe en utilisant **1.*a.*** et **4.**